

Die Knickbiegung des mehrfeldrigen geraden Balkens mit feldweise konstanten Kenngrößen

Borgwardt, Fritz

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 12, 1960,
S.77-94



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die Knickbiegung des mehrfeldrigen geraden Balkens mit feldweise konstanten Kenngrößen

Von Fritz Borgwardt

Vorgelegt von Herrn H. Schaefer

Eingereicht am 11. 6. 1960

Summary: Simultaneous bending and buckling of multi-sectional straight beams with constant section-coefficients is exactly handled by means of matrix-calculation; the special case of pure buckling is included in this method too.

Übersicht: Das Problem der Knickbiegung gerader mehrfeldriger Balken mit feldweise konstanten Kenngrößen wird in einer auf die Programmierung elektronischer digitaler Rechenanlagen zugeschnittenen Form mit Hilfe von Übertragungsmatrizen exakt gelöst; als Sonderfall wird auch das reine Knicken mit behandelt.

1. Einleitung

Zur Berechnung der Kraft- und Deformationsgrößen mehrfeldriger Stäbe, Balken und Rahmen wurden vor einigen Jahren Verfahren entwickelt [1 bis 12, 14], die auf folgendem Grundgedanken beruhen: Ausgehend von einem Anfangspunkt O reduziert man die Kraft- und Deformationsgrößen sowie alle eingepprägten Belastungen in einen beliebigen Schnittpunkt S des zu berechnenden Gebildes und erhält so einen Zusammenhang zwischen diesen Größen in O und S . Faßt man Kraft- und Deformationsgrößen zu einem Zustandsvektor v zusammen, so läßt sich der Zusammenhang einfach als Matrizengleichung angeben:

$$v_S = \mathfrak{P} \cdot v_O \quad (1.1)$$

Hierbei ist \mathfrak{P} eine Matrix, deren Ordnung m normalerweise gleich der Ordnung der Differentialgleichung ist, die das Problem beschreibt: Bei Biegebeanspruchung (Gewöhnliche Biegung, Biegeschwingungen, Knicken und Knickbiegung) ist $m = 4$, bei Längsbeanspruchung (Längsdehnung und Torsion im statischen und dynamischen Fall) ist $m = 2$. Die im Vektor v_O zusammengefaßten m Konstanten lassen sich gerade aus den m Randbedingungen bestimmen, so daß dann bei bekannter Matrix \mathfrak{P} an allen Schnitten S der gesuchte Zustandsvektor berechnet werden kann.

In der vorliegenden Arbeit soll dieses sogenannte Reduktions- oder Übertragungsverfahren auf die Knickbiegung des n -feldrigen geraden Balkens mit feldweise konstanten Kennwerten angewendet werden, wobei die Hauptaufgabe in der Ermittlung der Matrix \mathfrak{P} liegen wird. Im Anschluß daran werden einige Ergebnisse erläutert, die nach diesem Verfahren mit Hilfe des digitalen Rechenautomaten Z22 gewonnen wurden.

2. Die Leitmatrix

2.1 Allgemeines

Wir treffen zunächst folgende Vereinbarungen für den Balken: Waagerechte Lasten dürfen nur als Einzelkräfte P_i angreifen, da der Verlauf der Horizontalkraft

$$H_i = \sum_{v=0}^{i-1} P_v \quad (2.1)$$

ebenso wie die Biegesteifigkeit EI_i feldweise konstant sein soll. Bei der Aufstellung der Grundgleichungen wird die Bedingung benötigt, daß die vertikale Belastung $q(x)$ feldweise stetig sein soll; wir werden uns später wieder davon trennen. Feldgrenzen sind demnach diejenigen Stellen des Balkens, an denen sich die Kenngrößen H_i oder EI_i oder die Belastungsfunktion $q(x)$ ändern, an denen eingeprägte Vertikalkräfte K_i oder Einzel(biege)momente \bar{M}_i angreifen oder an denen sich starre oder elastische Stützen befinden. Im übrigen sollen die in der gewöhnlichen Balkenbiegetheorie üblichen Voraussetzungen gelten; insbesondere sei die Balkenneigung φ so klein, daß $\tan \varphi = \varphi = \sin \varphi$ gesetzt werden kann.

Als Zustandsgrößen werden die Durchbiegung w , die Balkenneigung φ , das Biegemoment M und die Querkraft Q eingeführt, so daß der Zustandsvektor \mathfrak{y} die Form hat:

$$\mathfrak{y} = \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ -w' \\ EIw'' \\ EIw''' \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Dabei ist zu beachten, daß im Fall der Knickbiegung zwischen Querkraft Q und Vertikalkraft V ebenso wie zwischen Horizontalkraft H und Längskraft L wohl unterschieden werden muß, da das Kräftegleichgewicht bei der Knickbiegung am verformten Balkenelement aufgestellt wird und so z. B. die Horizontalkraft H nach Abb. 1 einen Anteil an der senkrecht zur Balkenachse gerichteten Querkraft hat:

$$Q = V + H \varphi \quad (2.3)$$

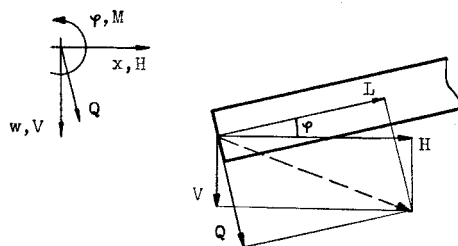


Abb. 1. Vorzeichenfestsetzung und Schnittkräfte

2.2 Die Grundgleichungen

Die Differentialgleichung des Problems lautet unter den obigen Voraussetzungen für ein Feld der Nummer i :

$$w_i''''(x) + \varepsilon_i^2 w_i''(x) = \frac{q(x)}{EI_i} \quad (2.4)$$

mit

$$\varepsilon_i^2 = \frac{H_i}{EI_i}, \quad (2.5)$$

wobei die Koordinate x von der linken Grenze des Feldes aus gezählt werden soll. Die allgemeine Lösung von (2.4) ist:

$$w_i(x) = D_1 + D_2 x + D_3 \sin \varepsilon_i x + D_4 \cos \varepsilon_i x + \widehat{w}_i(x) \quad (2.6)$$

mit $\widehat{w}_i(x)$ als Partikularlösung. Die mechanisch wenig sinnvollen Integrationskonstanten D_k werden ersetzt durch die Kraft- und Deformationsgrößen an der Stelle $x = 0$, so daß sich die Lösungsfunktion mit ihren Ableitungen folgendermaßen schreiben läßt:

	$w_i(0) - \widehat{w}_i(0)$	$w'_i(0) - \widehat{w}'_i(0)$	$w''_i(0) - \widehat{w}''_i(0)$	$w'''_i(0) - \widehat{w}'''_i(0)$
$w_i(x) - \widehat{w}_i(x) =$	1	x	$\frac{1}{\varepsilon_i^2} (1 - \cos \varepsilon_i x)$	$\frac{1}{\varepsilon_i^3} (\varepsilon_i x - \sin \varepsilon_i x)$
$w'_i(x) - \widehat{w}'_i(x) =$	0	1	$\frac{1}{\varepsilon_i} \sin \varepsilon_i x$	$\frac{1}{\varepsilon_i^2} (1 - \cos \varepsilon_i x)$
$w''_i(x) - \widehat{w}''_i(x) =$	0	0	$\cos \varepsilon_i x$	$\frac{1}{\varepsilon_i} \sin \varepsilon_i x$
$w'''_i(x) - \widehat{w}'''_i(x) =$	0	0	$-\varepsilon_i \sin \varepsilon_i x$	$\cos \varepsilon_i x$

(2.7)

Die Partikularlösung ist abhängig von der Funktion $q(x)$. Wir beschränken uns hier auf den Fall konstanter Streckenlast $q(x) = q$; andere Belastungsfunktionen bieten dann keine grundsätzlich neuen Schwierigkeiten. In diesem Fall lautet die Partikularlösung:

$$\widehat{w}(x) = \frac{qx^2}{2H} \quad (2.8)$$

Wenn wir (2.8) in (2.7) einsetzen und gleichzeitig (2.2) benutzen, erhalten wir Gleichungen zwischen den Komponenten der Zustandsvektoren $y_i(x)$ und $y_i(0)$, die zweckmäßigerweise durch eine "1" auf fünf Komponenten erweitert werden:

	$w_i(0)$	$\varphi_i(0)$	$M_i(0)$	$Q_i(0)$	1
$w_i(x) =$	1	$-x$	$\frac{1}{EI\varepsilon^2}(1 - \cos \varepsilon x)$	$\frac{1}{EI\varepsilon^3}(\varepsilon x - \sin \varepsilon x)$	$-\frac{q}{EI\varepsilon^4}(1 - \cos \varepsilon x) + \frac{qx^2}{2H}$
$\varphi_i(x) =$	0	1	$-\frac{1}{EI\varepsilon} \sin \varepsilon x$	$-\frac{1}{EI\varepsilon^2}(1 - \cos \varepsilon x)$	$\frac{q}{EI\varepsilon^3} \sin \varepsilon x - \frac{qx}{H}$
$M_i(x) =$	0	0	$\cos \varepsilon x$	$\frac{1}{\varepsilon} \sin \varepsilon x$	$-\frac{q}{\varepsilon^2} \cos \varepsilon x + \frac{q}{\varepsilon^2}$
$Q_i(x) =$	0	0	$-\varepsilon \sin \varepsilon x$	$\cos \varepsilon x$	$\frac{q}{\varepsilon} \sin \varepsilon x$
1 =	0	0	0	0	1

Setzen wir hier $x = l$, so bekommen wir den Zusammenhang zwischen den Vektoren $\mathfrak{y}_i(0)$ am linken und $\mathfrak{y}_i(l)$ am rechten Ende des Feldes i . In Matrizenform lautet diese Gleichung:

$$\mathfrak{y}_i(l) = \mathfrak{F}_i \cdot \mathfrak{y}_i(0) \quad (2.10)$$

mit der Feldmatrix

$$\mathfrak{F}_i = \begin{pmatrix} 1 & -l & \frac{1}{H}(1 - \cos \gamma) & \frac{l}{H\gamma}(\gamma - \sin \gamma) & -\frac{ql^2}{H\gamma^2}\left(1 - \cos \gamma - \frac{\gamma^2}{2}\right) \\ 0 & 1 & -\frac{\gamma}{Hl} \sin \gamma & -\frac{1}{H}(1 - \cos \gamma) & \frac{ql}{H\gamma}(\sin \gamma - \gamma) \\ 0 & 0 & \cos \gamma & \frac{l}{\gamma} \sin \gamma & -\frac{ql^2}{\gamma^2}(\cos \gamma - 1) \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{l} \sin \gamma & \cos \gamma & \frac{ql}{\gamma} \sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

wobei

$$\gamma_i^2 = \frac{H_i l_i^2}{EI_i} \quad (2.12)$$

gesetzt wurde.

2.3 Die Übergangsbedingungen

Es muß nun untersucht werden, wie sich der Zustandsvektor beim Übergang über eine Feldgrenze ändert. Nach Abb. 2 hängen die Kraftgrößen unmittelbar links und rechts einer Feldgrenze folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} M_{i+1}(0) &= M_i(l) - C_i \varphi_i + \bar{M}_i \\ Q_{i+1}(0) &= Q_i(l) - c_i w_i + H_i \varphi_i + K_i \end{aligned} \quad (2.13)$$

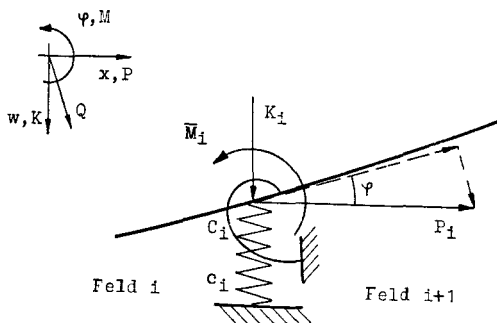


Abb. 2. Kräfte und Momente an der Feldgrenze i

Hierbei ist C_i die Federkonstante der Drehfeder und c_i die der senkrechten Zug-Druckfeder.

Diese Gleichungen lassen sich einfach in die Feldmatrix \mathfrak{F}_i einfügen; es entsteht dann eine rechteckige „Leitmatrix“ \mathfrak{L}_i und die Matrizenmultiplikation

ist „verschränkt“ oder „überlappend“*) auszuführen, d. h. die beiden ersten Komponenten von $\psi_{i+1}(o)$ werden als 6. und 7. Komponente des Vektors $\psi_i(o)$ wie nebenstehend aufgefaßt:

Da der Vektor \mathbf{y}_{i+1} (o) zur Feldgrenze i gehört, schreiben wir kurz \mathbf{y}_{i+1} (o) $\equiv \mathbf{y}_i$, usw. Der Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen am linken Ende des Feldes i und am linken Ende des Feldes $i + 1$ wird somit durch die Leitmatrix \mathfrak{L}_i vermittelt:

$$\mathfrak{v}_i = \mathfrak{L}_i \mathfrak{v}_{i-1} \quad (2.15)$$

Entsprechend gilt für das nächste Feld:

$$\mathfrak{y}_{i+1} = \mathfrak{L}_{i+1} \mathfrak{y}_i \quad (2.16)$$

Beide Gleichungen ergeben dann zusammengefaßt:

$$\mathfrak{y}_{i+1} = \mathfrak{L}_{i+1} \mathfrak{L}_i \cdot \mathfrak{y}_{i-1} \quad (2.17)$$

Beginnen wir diese Rechnung mit dem Anfangsvektor η_0 , so berechnet sich der Vektor η_i nach der Gleichung:

$$\eta_i = \mathfrak{L}_i \cdot \mathfrak{L}_{i-1} \dots \mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{L}_1 \cdot \eta_0 \quad (2.18)$$

Hiermit haben wir den gesuchten Zusammenhang (1.1) gefunden.

$$(2.14) \quad \begin{array}{c} L_i \left\{ \begin{array}{c} -l \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} \frac{1}{H} (1 - \cos \gamma) \\ -\frac{\gamma}{Hl} \sin \gamma \\ \cos \gamma \\ -\frac{\gamma}{l} \sin \gamma \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \frac{1}{H\gamma} (\gamma - \sin \gamma) \\ -\frac{1}{H} (1 - \cos \gamma) \\ \frac{l}{\gamma} \sin \gamma \\ \cos \gamma \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} -q^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} (1 - \cos \gamma) - \frac{1}{2} \right) \\ q l \left(\frac{1}{\gamma} \sin \gamma - 1 \right) \\ -\frac{q l^2}{\gamma^2} (\cos \gamma - 1) + \bar{M} \\ q \frac{l}{\gamma} \sin \gamma + K \\ -c \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -C \\ P \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} w_i(0) \\ q_i(0) \\ M_i(0) \\ Q_i(0) \\ 1 \end{array} \Bigg\} \equiv y_{i-1} \\ \equiv y_i \end{array}$$

2.4 Die Lastgrößen

Wie wir in (3.1) gesehen haben, kann man eingeprägte Vertikalkräfte K_j und Biegemomente M_j nur durch die Übergangsbedingung in die Rechnung hineinbringen, d. h. man muß alle Kraft- und Momentenangriffsstellen zu Feldgrenzen machen. Um aber den Rechenaufwand möglichst niedrig zu halten, werden wir uns jetzt durch eine kleine Überlegung von dieser Bedingung

*) siehe Zurmühl [1], S. 392.

befreien. Betrachtet man beispielsweise ein Feld der Länge l , das nur aus dem Grund in zwei Felder der Länge b und a unterteilt werden muß, weil in seinem Innern ein Biegemoment \bar{M} angreift (Abb. 3), so kann der Zustandsvektor \mathfrak{y}_i über den Zwischenvektor \mathfrak{y}_{i-1}^* aus \mathfrak{y}_{i-1} berechnet werden entsprechend der

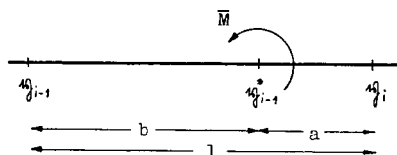


Abb. 3. Herleitung der Lastgrößen

Vorschrift (3.5). Wenn wir $\gamma^2 = Hl^2/EI$ definieren, wird die erste Leitmatrix \mathfrak{L}^* mit der Kennzahl $\gamma^* = \sqrt{Hb^2/EI} = b\gamma/l$ gebildet und damit der Vektor \mathfrak{y}_{i-1}^* berechnet. Dann wird daraus mit der Matrix \mathfrak{L}^{**} (gebildet mit der Kennzahl $\gamma^{**} = \sqrt{Ha^2/EI} = a\gamma/l$) der Vektor \mathfrak{y}_i gewonnen:

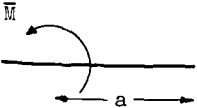
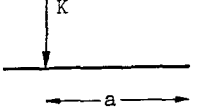
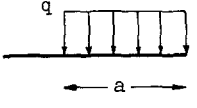
$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{L}^* \begin{bmatrix} w_i(0) \\ \varphi_i(0) \\ M_i(0) \\ Q_i(0) \\ 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{y}_{i-1} \\
 & \mathfrak{L}^{**} \begin{bmatrix} 1 & -b & \frac{1}{H} \left(1 - \cos \frac{b\gamma}{l}\right) & \frac{l}{H\gamma} \left(\frac{b\gamma}{l} - \sin \frac{b\gamma}{l}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\gamma}{Hl} \sin \frac{b\gamma}{l} & -\frac{1}{H} \left(1 - \cos \frac{b\gamma}{l}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{b\gamma}{l} & \frac{l}{\gamma} \sin \frac{b\gamma}{l} & \bar{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{l} \sin \frac{b\gamma}{l} & \cos \frac{b\gamma}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots + \bar{M} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{y}_{i-1}^* \\
 & \mathfrak{L}^{**} \begin{bmatrix} 1 & -a & \frac{1}{H} \left(1 - \cos \frac{a\gamma}{l}\right) & \frac{l}{H\gamma} \left(\frac{a\gamma}{l} - \sin \frac{a\gamma}{l}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\gamma}{Hl} \sin \frac{a\gamma}{l} & -\frac{1}{H} \left(1 - \cos \frac{a\gamma}{l}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{a\gamma}{l} & \frac{l}{\gamma} \sin \frac{a\gamma}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{l} \sin \frac{a\gamma}{l} & \cos \frac{a\gamma}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \left\{ + \frac{\bar{M}}{H} \left(1 - \cos \frac{a\gamma}{l}\right) \right\} \\ \dots \left\{ - \frac{\bar{M}\gamma}{Hl} \sin \frac{a\gamma}{l} \right\} \\ \dots \left\{ + \bar{M} \cos \frac{a\gamma}{l} \right\} \\ \dots \left\{ - \frac{\bar{M}\gamma}{l} \sin \frac{a\gamma}{l} \right\} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{y}_i
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Man erkennt nun, daß man denselben Vektor η_i erhält, wenn man auf die Berechnung des Zwischenvektors ganz verzichtet und η_{i-1} gleich mit der für die gesamte Länge l gebildeten Matrix \mathfrak{L}_i multipliziert. Den Einfluß des Biegemoments berücksichtigt man dann, indem man die in $\{\dots\}$ stehenden Ausdrücke zur 5. Spalte der Leitmatrix hinzufügt. Diese Ausdrücke werden „Lastgrößen“ genannt und zur Abkürzung mit \tilde{w} , $\tilde{\varphi}$, \tilde{M} und \tilde{Q} bezeichnet. Entsprechende Ausdrücke für im Innern des Feldes angreifende vertikale Einzelkräfte oder nur in einem Teil des Feldes angreifende konstante Streckenlasten werden genauso ermittelt. Die Matrix \mathfrak{L}_i hat damit die endgültige Form:

$$\mathfrak{L}_i = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -l & \frac{1}{H} (1 - \cos \gamma) & \frac{l}{H\gamma} (\gamma - \sin \gamma) & \tilde{w} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\gamma}{Hl} \sin \gamma & -\frac{1}{H} (1 - \cos \gamma) & \tilde{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & \frac{l}{\gamma} \sin \gamma & \tilde{M} & 0 & -C \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{l} \sin \gamma & \cos \gamma & \tilde{Q} & -c & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] i \quad (2.20)$$

Die zugehörigen Lastgrößen findet man in Tabelle 1 vor.

Tabelle 1: Lastgrößen

		
$\tilde{w} = \frac{\bar{M}}{H} \left(1 - \cos \frac{a\gamma}{l} \right)$	$\tilde{w} = \frac{Kl}{H\gamma} \left(\frac{a\gamma}{l} - \sin \frac{a\gamma}{l} \right)$	$\tilde{w} = -\frac{ql^2}{H} \left[\frac{1}{\gamma^2} \left(1 - \cos \frac{a\gamma}{l} \right) - \frac{a^2}{2l^2} \right]$
$\tilde{\varphi} = -\frac{\bar{M}\gamma}{Hl} \sin \frac{a\gamma}{l}$	$\tilde{\varphi} = \frac{K}{H} \left(\cos \frac{a\gamma}{l} - 1 \right)$	$\tilde{\varphi} = \frac{ql}{H} \left(\frac{1}{\gamma} \sin \frac{a\gamma}{l} - \frac{a}{l} \right)$
$\tilde{M} = \bar{M} \cos \frac{a\gamma}{l}$	$\tilde{M} = \frac{Kl}{\gamma} \sin \frac{a\gamma}{l}$	$\tilde{M} = \frac{ql^2}{\gamma^2} \left(1 - \cos \frac{a\gamma}{l} \right)$
$\tilde{Q} = -\frac{\bar{M}\gamma}{l} \sin \frac{a\gamma}{l}$	$\tilde{Q} = K \cos \frac{a\gamma}{l}$	$\tilde{Q} = \frac{ql}{\gamma} \sin \frac{a\gamma}{l}$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Vorschrift (2.20) zusammen mit (2.21) das gleiche Ergebnis liefert wie das Schema (2.19). Echte Feldgrenzen sind also nur noch solche Stellen, an denen sich die Biegesteifigkeit oder die Horizontalkraft H ändert oder an denen sich feste oder elastische Stützen befinden. Falls in einem Feld mehrere Vertikalkräfte, Biegemomente oder Streckenlasten auftreten, addieren sich einfach die Lastgrößen.

Ist der Horizontalkraftverlauf H_i in einem Feld negativ, so wird der Wert γ_i imaginär, und in (2.20) und (2.21) gehen die Kreisfunktionen in die entspre-

chenden Hyperbelfunktionen über, wobei bei einigen Ausdrücken auf eine Umkehr des Vorzeichens geachtet werden muß. Ist die Horizontalkraft eines Feldes dagegen null, so gehen (2.20) und (2.21) in die bekannten Ausdrücke für den Fall der gewöhnlichen Biegung über [4].

3. Der Verlauf der Berechnung

3.1 Die Randbedingungen

Das Gleichungssystem (1.1) lautete nach (2.18):

$$\mathfrak{v}_i = \mathfrak{L}_i \mathfrak{L}_{i-1} \dots \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_1 \mathfrak{v}_0 = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{v}_0 \quad (3.1)$$

Wir brauchen also nur noch die vier Konstanten w_0 , φ_0 , M_0 und Q_0 zu ermitteln, um alle Zustandsvektoren \mathfrak{v}_i berechnen zu können. Zwei der Konstanten werden gleich aus den beiden Randbedingungen am linken Balkenende bestimmt. Da der Vektor \mathfrak{v}_0 den Zustand unmittelbar rechts vom Auflager beschreibt, treten die Reaktionen der Federn C_0 und c_0 sowie die Querkraftkomponente der waagerechten Einzelkraft P_0 in diesen Bedingungen mit auf:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Feste Einspannung:} & w_0 = \text{const} (=0) \quad \varphi_0 = \text{const} (=0) \\ \text{Momentenstütze (gefedert):} & Q_0 = 0 \quad \varphi_0 = \text{const} (=0) \\ \text{Festes Auflager (gefedert):} & w_0 = \text{const} (=0) \quad M_0 = -C_0 \varphi_0 \\ \text{Freies Ende (gefedert):} & Q_0 = P_0 \varphi_0 - c_0 w_0 \quad M_0 = -C_0 \varphi_0 \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

Aus rechentechnischen Gründen kann es von Vorteil sein, formal ein Feld 0 von der Länge $l_0 = 0$ so einzuführen, daß sich das Auflager am linken Ende befindet, während die Federn C_0 und c_0 und die Horizontalkraft P_0 am rechten Ende dieses Feldes angreifen. Jetzt gelten nämlich für den neuen Anfangsvektor \mathfrak{v}_{-1} die einfachen Bedingungen:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Feste Einspannung} & w_{-1} = \text{const} (=0) \quad \varphi_{-1} = \text{const} (=0) \\ \text{Momentenstütze (gefedert):} & Q_{-1} = 0 \quad \varphi_{-1} = \text{const} (=0) \\ \text{Festes Auflager (gefedert):} & w_{-1} = \text{const} (=0) \quad M_{-1} = 0 \\ \text{Freies Ende (gefedert):} & Q_{-1} = 0 \quad M_{-1} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Die beiden letzten Spalten der Matrix \mathfrak{L}_0 sorgen dann dafür, daß die Federreaktionen und die Querkraftkomponente von P_0 beim Übergang von Feld 0 in Feld 1 in den Vektor \mathfrak{v}_0 aufgenommen werden.

In jedem Fall enthält der Anfangsvektor noch zwei unbekannte Konstanten, die sogenannten Freiwerte, die wir allgemein mit A und B bezeichnen. Der Anfangsvektor wird dann an allen Leitmatrizen des n -feldrigen Balkens entlang multipliziert, was nach (3.1) den Vektor \mathfrak{v}_n ergibt. Da dieser infolge der Übergangsspalten von \mathfrak{L}_n den Zustand rechts von der Angriffsstelle der Federn C_n und c_n und der Horizontalkraft P_n beschreibt, gelten für ihn die einfachen Randbedingungen (3.3), wenn man den Index -1 durch n ersetzt.

Daraus lassen sich die beiden Freiwerte bestimmen, womit wir dann entsprechend der Vorschrift (3.1) alle Vektoren \mathfrak{v}_i berechnen können.

Die Berechnung des Balkens mit Zwischenbedingungen (z. B. $w_i = 0$ an einer starren Stütze) braucht hier nicht näher erläutert zu werden, da sie schon ausführlich in [4] für den Fall der gewöhnlichen Biegung behandelt worden ist und in unserem Fall der Knickbiegung genauso verläuft.

3.2 Die praktische Durchführung

Die praktische Durchführung des Verfahrens soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden (Abb. 4):

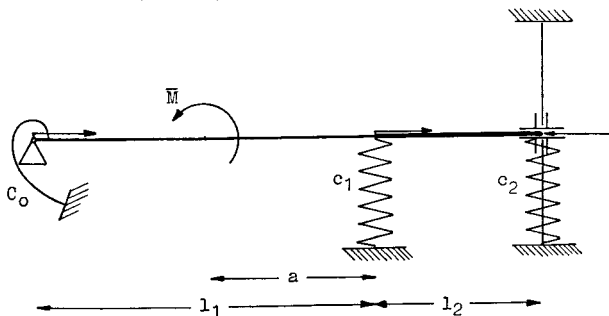


Abb. 4. Beispiel 1

Gegebene Werte:

$$\begin{aligned} P_0 &= 2000 \text{ kg}; & l_0 &= 0 & C_0 &= 10\,000 \text{ cmkg} \\ P_1 &= 2000 \text{ kg}; & l_1 &= 200 \text{ cm}; & EI_1 &= 8 \cdot 10^7 \text{ kgcm}^2; & c_1 &= 100 \text{ kg/cm} \\ P_2 &= -4000 \text{ kg}; & l_2 &= 100 \text{ cm}; & EI_2 &= 16 \cdot 10^7 \text{ kgcm}^2; & c_2 &= 25 \text{ kg/cm} \\ \bar{M} &= 50\,000 \text{ kgcm}; & a &= 100 \text{ cm} \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich:

$$H_1 = 2000 \text{ kg}; \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{H_1 l_1^2}{EI_1}} = 1$$

$$H_2 = 4000 \text{ kg}; \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{H_2 l_2^2}{EI_2}} = \frac{1}{2}$$

Die Randbedingungen lauten nach (3.3) für das linke Balkenende $w_{-1} = 0$ und $M_{-1} = 0$, so daß φ_{-1} und Q_{-1} die Freiwerte sind. Aus rechtechnischen Gründen teilt man den Anfangsvektor in je eine Spalte für die beiden Freiwerte und eine homogene Spalte auf:

$$\mathfrak{v}_{-1} = \begin{bmatrix} w_{-1} \\ \varphi_{-1} \\ M_{-1} \\ Q_{-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_{-1} \\ 0 \\ Q_{-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \varphi_{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + Q_{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Zahlenschema zum Beispiel (Abb. 4)

Anmerkung: Die Zahlen hinter den Schrägstrichen geben die Zehnerpotenzen an.

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & -10000 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2000 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & -200 & 2,299/-4 & 1,585/-2 & 3,060 & | & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -2,104/-6 & -2,298/-4 & -5,993/-2 & | & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 5,403/-1 & 1,683/ 2 & 4,388/ 4 & | & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -4,207/-3 & 5,403/-1 & -1,199/ 2 & | & -100 & 2000 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & -100 & 3,060/-5 & 1,029/-3 & 0 & | & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -5,993/-7 & -3,060/-5 & 0 & | & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 8,776/-1 & 9,589/ 1 & 0 & | & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -2,397/-3 & 8,776/-1 & 0 & | & -25 & -4000 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Die drei Spalten werden nun unabhängig voneinander nach (3.1) an allen Leitmatrizen entlanggeführt (siehe Zahlenschema). Mit den Randbedingungen für das rechte Balkenende erhalten wir aus dem (dreispaltigen) Vektor ϑ_n ein Gleichungssystem 2. Ordnung für die beiden Freiwerte:

$$\begin{aligned}
 -0,22794 \cdot \varphi_{-1} & -0,00028465 \cdot Q_{-1} & -0,069522 & = 0 \\
 21977,6 \cdot \varphi_{-1} & -1,6463 \cdot Q_{-1} & -551,91 & = 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

mit der Lösung: $\varphi_{-1} = 0,0064317$; $Q_{-1} = -249,38 \text{ kg}$

Diese Zahlenwerte werden eingesetzt und ergeben in der vierten Spalte die gesuchten Zustandsgrößen an den Feldgrenzen. Als Kontrolle der Rechnung dient dann, daß sich der Balken im Gleichgewicht befinden muß:

$$\begin{aligned}
 \sum Y_i &= Q_{-1} - c_1 w_1 - c_2 w_2 = 0 \\
 \sum M_{i(A)} &= -C_0 \varphi_0 + \bar{M} + c_1 w_1 l_1 + P_1 w_1 + c_2 w_2 (l_1 + l_2) + P_2 w_2 + M_B = 0.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Falls auch an Zwischenstellen die Kenntnis der Zustandsgrößen erwünscht ist, benutzt man nach der Berechnung der Freiwerte einfach statt der Leitmatrizen (2.20) die Feldmatrizen (2.9).

$$\begin{array}{c}
 (\varphi_{-1}) \quad (Q_{-1}) \quad (1) \\
 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,006432 \\ 0 \\ -249,38 \\ 1 \end{array} \right] = v_{-1} \\
 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -10000 \\ 2000 \\ 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,006432 \\ -64,32 \\ -236,518 \\ 1 \end{array} \right] = v_0 \\
 \left[\begin{array}{c} -1,7093/ 2 \\ 5,6134/-1 \\ 3,3119/ 5 \\ 1,9305/ 4 \\ 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 1,5853/-2 \\ -2,2985/-4 \\ 1,6829/ 2 \\ -1,5047 \\ 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 3,6044 \\ -5,9928/-2 \\ 4,3879/ 4 \\ -5,4576/ 2 \\ 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} -1,9902 \\ 0,00100 \\ 4039,7 \\ -46,353 \\ 1 \end{array} \right] = v_1 \\
 \left[\begin{array}{c} -1,9673/ 2 \\ -2,2794/-1 \\ 2,1417/ 6 \\ 2,1978/ 4 \\ 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 4,2440/-2 \\ -2,8465/-4 \\ 3,4151 \\ -1,6463 \\ 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 9,8347 \\ -6,9522/-2 \\ -1,3822/ 4 \\ -5,5191/ 2 \\ 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} -2,0145 \\ 0 \\ -899,36 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] = v_2
 \end{array}$$

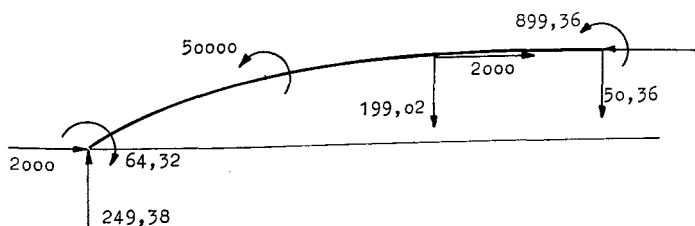


Abb. 5. Gleichgewicht der Kräfte [kg] und Momente [cmkg] zu Beispiel I

Für die Rechnung mit der Tischrechenmaschine empfiehlt es sich nach [4], das Schema nicht mit den wirklichen Längen und Kräften durchzuführen, sondern statt dessen Vergleichsgrößen so einzuführen, daß alle auftretenden Zahlenwerte in der gleichen Größenordnung liegen.

4. Der homogene Fall

Das homogene Problem des reinen Knickens liegt im Gegensatz zur bisher behandelten Knickbiegung dann vor, wenn die senkrechte Belastung des

Balkens fehlt. Da alle Größen der Lastspalte null sind, führt die Bestimmung der beiden Freiwerte A und B auf ein homogenes Gleichungssystem 2. Ordnung. Notwendige Bedingung für nichttriviale Lösungen, d. h. für ein Ausbiegen des Balkens, ist das Verschwinden der zweireihigen Determinante des Gleichungssystems. Für einen gegebenen Balken und eine gegebene Horizontalbelastung wird diese Bedingung im allgemeinen nicht erfüllt sein; man verändert dann entsprechend der Aufgabenstellung eine oder mehrere Horizontalkräfte oder Kenngrößen des Balkens mit einem variablen Faktor und trägt als Restgröße den zugehörigen Wert der Determinante auf. Aus dem Nulldurchgang der Restgrößenkurve erhält man dann die kritischen Knickwerte, wobei in der Praxis meistens nur der niedrigste Eigenwert interessieren wird. Die zu einem Eigenwert gehörige Knicklinie ist anschließend leicht zu bestimmen: einer der beiden Freiwerte wird gleich eins gesetzt und der andere aus dem Gleichungssystem berechnet. Mit dem nun bekannten Anfangsvektor kann dann nach (3.1) an allen Feldgrenzen der Zustandsvektor ermittelt werden.

5. Die Berechnung mit dem digitalen Rechenautomaten ZUSE Z 22

Nach dem beschriebenen Verfahren wurde ein Programm für die Z22 aufgestellt. Dieses Programm gestattet die Berechnung aller Durchlaufträger ohne Zwischenbedingungen sowie solcher Durchlaufträger, die an *allen* Feldgrenzen durch feste Auflager ($w_i = \text{const} (= 0)$) gestützt werden. Träger mit allgemeinen, gemischten Zwischenbedingungen (z. B. Gerbergelenken, Momentenstützen) bieten grundsätzlich keine Schwierigkeiten, fordern aber umfangreichere Programme und sind deshalb vorerst noch nicht programmiert worden. Die Felderzahl wurde auf 49 beschränkt; jedes Feld kann belastet werden durch vertikale Einzelkräfte K , konstante Streckenlasten q und Einzelmomente M , sowie durch die Horizontalkraft H_i , wobei $H_i \geq 0$ sein kann, also auch der Fall starrer Felder ($EI = \infty$) und die gewöhnliche Biegung eingeschlossen sind.

Die Eigenwerte (Knicklasten) bis zu beliebig hoher Ordnung berechnen wir so: Alle eingepprägten Horizontalkräfte P_i werden mit einem veränderlichen Faktor α multipliziert und der Wert der zugehörigen Determinante für jedes α ermittelt; bei Vorzeichenwechsel wird dann mit Hilfe der regula falsi der Wert α_{krit} bis auf eine vorgegebene Maximalabweichung ε genau bestimmt. Anschließend kann auf Wunsch die zugehörige Biegelinie berechnet werden.

Bei der Knickbiegung werden die Zustandsgrößen unmittelbar rechts der $n + 1$ Feldgrenzen angegeben, und zwar im ersten Fall w_i , q_i , M_i und Q_i und im zweiten Fall q_i , M_i , Q_i und die (vertikalen) Auflagerkräfte A_i . Zur Kontrolle der Rechnung wird der Balken anschließend von rechts nach links durchgerechnet, indem man einfach die Daten des spiegelbildlichen Balkens eingibt. An den Feldgrenzen müssen dann die Durchbiegungen w_i und die Neigungen φ_i übereinstimmen, während sich die Biegemomente M_i und die Querkräfte Q_i gerade durch die Ausdrücke in (2.13) unterscheiden müssen. Diese Kontrolle empfiehlt sich besonders bei Maschinenrechnung, um festzustellen, wie weit die unvermeidbaren Aufrundungsfehler im Ergebnis nach vorne gerückt sind.

Es sollen nun einige Beispiele gezeigt werden, die mit diesem Programm berechnet worden sind.

Beispiel I

Gegebene Werte (Abb. 6):

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 5000 \text{ kg} \\
 P_1 &= 0 \text{ kg} \quad l_1 = 300 \text{ cm} \quad EI_1 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kgcm}^2 \quad c_1 = 50 \text{ kg/cm} \\
 P_2 &= -5000 \text{ kg} \quad l_2 = 100 \text{ cm} \quad EI_2 = \infty \text{ (starr)} \quad c_2 = 200 \text{ kg/cm} \\
 P_3 &= -6000 \text{ kg} \quad l_3 = 100 \text{ cm} \quad EI_3 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kgcm}^2 \quad C_3 = 10^5 \text{ cmkg} \\
 P_4 &= 6000 \text{ kg} \quad l_4 = 200 \text{ cm} \quad EI_4 = 4,2 \cdot 10^8 \text{ kgcm}^2
 \end{aligned}$$

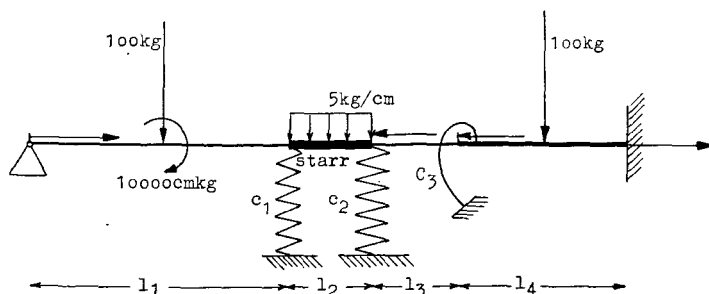


Abb. 6. Beispiel I

Damit wurden die Zustandsgrößen rechts der Feldgrenzen berechnet zu:

i	w [cm]	φ [Bog]	M [cmkg]	Q [kg]
0	0	-0,0184082066	0	-142,584249
1	2,52678416	0,00846443804	-22796,8857	-34,5602341
2	1,68034035	0,00846443804	-1252,90912	87,0495044
3	0,873152294	0,00698845417	6753,19589	45,1187792
4	-0,000000045	0,00000000042	28924,1828	187,049504

Linke Auflagerkraft: $Q_{-1} = -50,5432168 \text{ kg}$

Dazu die entsprechenden Werte des spiegelbildlichen Balkens:

i	w [cm]	φ [Bog]	M [cmkg]	Q [kg]
0	0	0	28924,1835	-187,049505
1	0,873152294	-0,00698845412	7452,04159	-87,0495044
2	1,68034035	-0,00846443810	-1252,90884	-465,439767
3	2,52678417	-0,00846443810	-22796,8855	-91,7789744
4	0,000000037	0,0184082063	0	50,5432163

Man erkennt, daß die Durchbiegungen und Balkenneigungen in beiden Fällen bis auf Abweichungen in der letzten Stelle gleich sind und daß sich die entsprechenden Biegemomente und Querkräfte gerade durch die Sprunggrößen (3.13) unterscheiden. Mit den bekannten Zustandsgrößen an den Feldgrenzen kann man sich jetzt leicht den ungefähren Verlauf im Innern der Felder überlegen (Abb. 8 und 9), wenn man nicht die Maschine eine genaue Rechnung nach (2.9) durchführen lassen will.

Abb. 7
Gleichgewicht der Kräfte
[kg] und Momente [cmkg]
zu Beispiel I

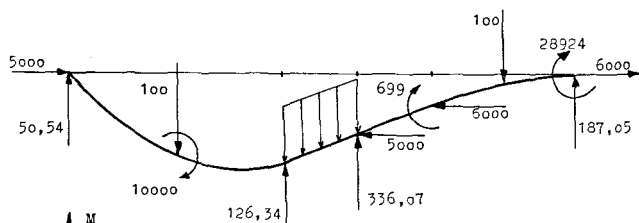


Abb. 8
Momentenverlauf
zu Beispiel I

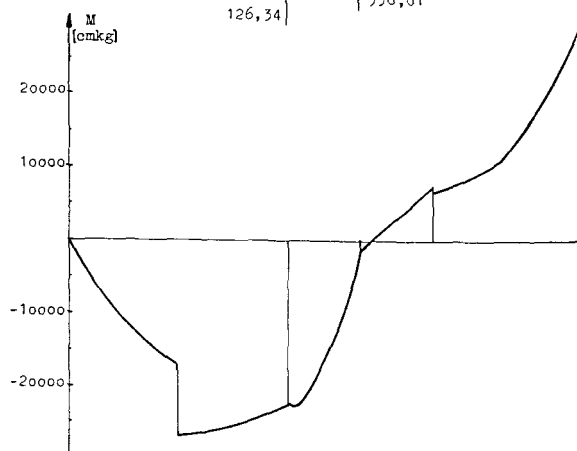
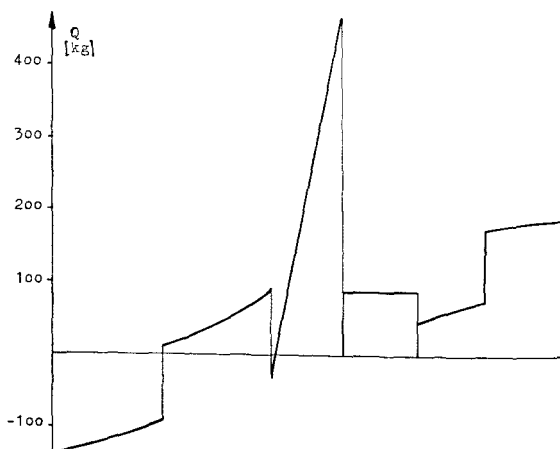


Abb. 9
Querkraftverlauf
zu Beispiel I



Beispiel II (Testbeispiel)

Gegebene Werte (Abb. 10):

$$L = 400 \text{ cm}; EI = 1,6 \cdot 10^8 \text{ kgcm}^2; P = 1000 \text{ kg}; q = 5 \text{ kg/cm}$$

Um die Fehlerfortpflanzung des Rechenverfahrens bei großen Felderzahlen zu untersuchen, wurde dieser an sich einfeldrige Balken in 40 gleichlange Felder unterteilt und von der Maschine als 40feldriger Balken berechnet (Rechenzeit: 20 Minuten). Die Werte für die Durchbiegung sind in Tabelle 2



Abb. 10. Beispiel II

zusammengestellt. Man sieht, daß die Biegelinie bis auf Abweichungen in der 6. Stelle nach dem Komma symmetrisch ist, was schon als Kontrolle für die Genauigkeit ausreichen würde. Zur weiteren Kontrolle wurde der Balken einfeldrig mit einer Tischrechenmaschine berechnet. Es wurden die Durchbiegungen an den einzelnen Zwischenstellen nach (2.9) ermittelt, wobei sich ebenfalls eine erstaunlich gute Übereinstimmung der Ergebnisse zeigt. (Tab. 2).

Tabelle 2: Durchbiegungen in [cm] zu Beispiel II

Z22 (40feldrig)				Genaue Werte (einfeldrig)
0	0	40	—0,000000660	0
1	0,924924849	39	0,924923955	0,924924787
2	1,84320424	38	1,84320315	1,84320379
3	2,74848332	37	2,74848208	2,74848273
4	3,63472787	36	3,63472651	3,63472738
5	4,49622802	35	4,49622658	4,49622740
6	5,32760189	34	5,32760039	5,32760136
7	6,12379885	33	6,12379734	6,12379843
8	6,88010281	32	6,88010129	6,88010209
9	7,59213502	31	7,59213357	7,59213446
10	8,25585694	30	8,25585554	8,25585647
11	8,86757271	29	8,86757140	8,86757225
12	9,42393140	28	9,42393018	9,42393085
13	9,92192923	27	9,92192812	9,92192878
14	10,3589112	26	10,3589103	10,3589111
15	10,7325733	25	10,7325725	10,7325733
16	11,0409632	24	11,0409626	11,0409631
17	11,2824821	23	11,2824816	11,2824819
18	11,4558852	22	11,4558848	11,4558852
19	11,5602830	21	11,5602828	11,5602831
20	11,5951416			11,5951418

Beispiel III

Gesucht ist die Knicksicherheit des sechsfeldrigen Balkens nach Abb. 11 mit den Abmessungen:

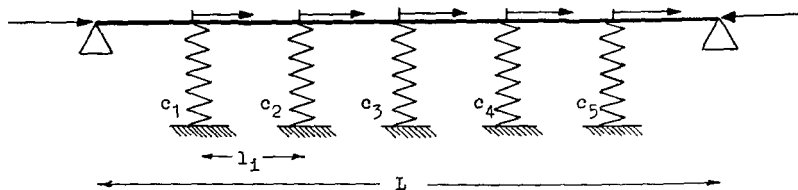


Abb. 11. Beispiel III

$$I_1 = 43,4 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 43,4 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

$$I_3 = 65,1 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

$$I_4 = 92,8 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

$$I_5 = 92,8 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

$$I_6 = 112,2 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

$$L = 36 \text{ m}; \quad l_1 = 600 \text{ cm}; \quad E = 2,15 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$c_1 = 15,12 \text{ t/cm}$$

$$c_2 = 10,3 \text{ t/cm}$$

$$c_3 = 7,55 \text{ t/cm}$$

$$c_4 = 5,78 \text{ t/cm}$$

$$c_5 = 17,2 \text{ t/cm}$$

$$P_0 = 134 \text{ t}$$

$$P_1 = 128 \text{ t}$$

$$P_2 = 129 \text{ t}$$

$$P_3 = 121 \text{ t}$$

$$P_4 = 141 \text{ t}$$

$$P_5 = 288 \text{ t}$$

$$P_6 = -941 \text{ t}$$

Es handelt sich bei diesem Balken um den Binderuntergurt der Flugsteig-halle Tempelhof, der 1938 von A. Schleußner [11] nach einem Näherungs-verfahren berechnet wurde und später von W. Schnell [12] als Beispiel für sein Verfahren benutzt worden ist. Der kleinste Faktor α_{krit} , mit dem die Hori-zontalkräfte P_i vergrößert werden müssen, damit der Balken ausknickt, wurde mit dem vorliegenden Programm (Rechenzeit: 20 Minuten) berechnet zu:

$$\alpha_{\text{krit}} = 5,85752$$

Die Vergleichswerte der anderen Verfahren sind:

$$\text{Schleußner: } \alpha_{\text{krit}} = 6,03 \text{ (Näherung)}$$

$$\text{Schnell: } \alpha_{\text{krit}} = 5,855 \text{ (exakt)}$$

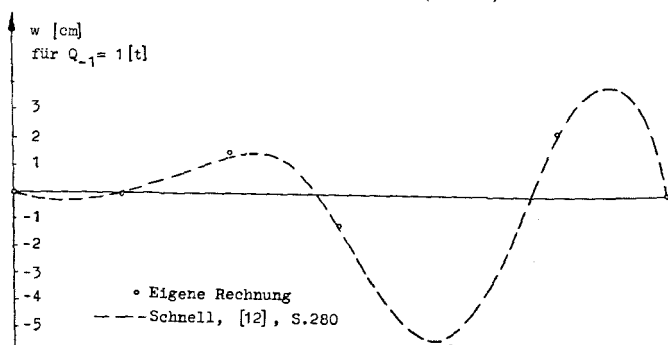


Abb. 12. Durchbiegungen zu Beispiel III

Die zu diesem Eigenwert gehörenden Durchbiegungen sind in Abb. 12 eingetragen.

Für den Fall starrer Zwischenstützen ($c_i = \infty$) wird:

$$\alpha_{\text{krit}} = 8,09948$$

Dazu die Vergleichswerte:

$$\text{Schleußner: } \alpha_{\text{krit}} = 8,05$$

$$\text{Schnell: } \alpha_{\text{krit}} = 8,10$$

Obwohl das Verfahren von *Schnell* anders aufgebaut ist und ganz andere Matrizen benutzt als die vorliegende Arbeit, stimmen die berechneten Werte in beiden Fällen sehr gut überein.

Beispiel IV

Gegebene Werte: $L = 400 \text{ cm}$; $l_i = 100 \text{ cm}$; $EI = 2 \cdot 10^8 \text{ kgcm}^2$; $P = 1250 \text{ kg}$.

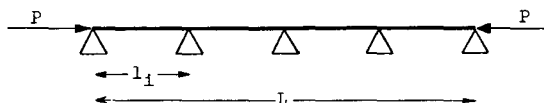


Abb. 13. Beispiel IV

Der niedrigste Eigenwert dieses Balkens mit festen Zwischenstützen (Abb. 13) ist bekanntlich gleich dem vierten Eigenwert des gleichen Balkens ohne Zwischenstützen. Der Ausdruck für die Knickkraft lautet hierfür:

$$P_k = (4\pi)^2 \cdot \frac{EI}{L^2} = 20000 \pi^2 [\text{kg}]$$

Da die Horizontalkraft $P = 1250 \text{ kg}$ ist, hat der gesuchte Faktor den Wert:

$$\alpha_{\text{krit}} = 16\pi^2 = 157,9136704$$

Die Rechnung der Maschine ergab:

$$\alpha_{\text{krit}} = 157,913670$$

Die Biegelinie wurde ermittelt zu:

i	φ [Bog]	M [cmkg]	Q [kg]	A [kg]
0	1,00000000	0	197392,095	-0,00634766
1	-0,99999938	-0,642952503	-197392,070	0,02587890
2	0,999999736	1,28590492	197392,017	-0,05224609
3	-0,999999409	-1,92885716	-197391,939	0,07812500
4	0,999998943	2,57180915	0,005	-0,04638672

Die genauen Werte sind dagegen:

i	φ [Bog]	M [cmkg]	Q [kg]	A [kg]
0	1	0	$20000 \pi^2 = 197392,088$	0
1	-1	0	-197392,088	0
2	1	0	197392,088	0
3	-1	0	-197392,088	0
4	1	0	0	0

Die berechneten Werte der Balkenneigung und Querkraft stimmen gut mit den genauen Werten überein; dasselbe trifft auch für die Auflagerkräfte und das Biegemoment zu, denn die von der Maschine berechneten Werte sind tatsächlich sehr klein im Vergleich zur Querkraft bzw. zum maximalen Biegemoment, das hier einer Überschlagrechnung zufolge in der Größenordnung von 10^6 cmkg liegt.

6. Zusammenfassung

Mit Hilfe einfach gebauter Rechteckmatrizen lassen sich auf Knicken oder Knickbiegung beanspruchte Durchlaufträger mit konstanten Kenngrößen exakt berechnen. Einige auf der elektronischen Ziffernmaschine Z22 gerechneten Beispiele demonstrieren Güte und Genauigkeit des Verfahrens. Fertige Rechenprogramme stehen im Rechenzentrum der Technischen Hochschule zur Zeit für folgende Probleme zur Verfügung:

- a) Durchlaufträger, elastisch senk- und drehbar gestützt (Abb. 6, 11), aber ohne Gerbergelenke und starre Zwischenstützen.
- b) Durchlaufträger auf lauter starren Stützen (Abb. 13), mit Drehfedern, aber ohne Gerbergelenke.

In einer späteren Arbeit soll das Verfahren auf Knicken und Knickbiegung von Rahmentragwerken erweitert werden.

Literatur

- [1] Zurmühl, R., „Matrizen“, Springer-Verlag, 1958, S. 382—423.
- [2] Falk, S., „Biegen, Schwingen, Knicken des mehrfeldrigen geraden Balkens“. Abh. Braunschweig. Wiss. Ges., Bd. VII, 1955.
- [3] Falk, S., „Die Knickformeln für den Stab mit n Teilstücken konstanter Biegesteifigkeit.“ Ing.-Arch., Bd. 24, Heft 2, 1956.
- [4] Falk, S., „Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren“. Ing.-Arch., Bd. 24, Heft 3, 1956.
- [5] Falk, S., „Die Berechnung offener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren“. Ing.-Arch., Bd. 26, Heft 1, 1958.
- [6] Falk, S., „Die Berechnung geschlossener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren“. Ing.-Arch., Bd. 26, Heft 2, 1958.
- [7] Fuhrke, H., „Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls.“ Ing.-Arch., Bd. 23, 1955.
- [8] Fuhrke, H., „Bestimmung von Rahmenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls.“ Ing.-Arch., Bd. 24, 1956.
- [9] Marguerre, K., „Matrices of Transmission in Beam Problems“. Progress in Solid Mechanics, Band 1, Amsterdam 1960.
- [10] Pestel, E., „Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen von Stabwerken“. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftl. Gesellschaft, Bd. VI, 1954.
- [11] Pestel, E. und Mahrenholtz, O., „Zum numerischen Problem der Eigenwertbestimmung mit Übertragungsmatrizen.“ Ing.-Arch., Bd. 28, 1959.
- [12] Scheer, J., „Benutzung programmgesteuerter Rechenautomaten für statische Aufgaben, erläutert am Beispiel der Durchlaufträgerberechnung.“ Stahlbau, 27. Jahrgang, Heft 9, 1958.
- [13] Schleußner, A., „Die Stabilität des mehrfeldrigen elastisch gestützten Stabes“. Forschungshefte aus dem Gebiet des Stahlbaus, Heft 1, 1938.
- [14] Schnell, W., „Berechnung der Stabilität mehrfeldriger Stäbe mit Hilfe von Matrizen“ ZAMM, Bd. 35, Heft 6/7, 1955.